

Orientations complexes des J -courbes réelles

Complex orientations of real J -curves

Jean-Yves Welschinger
 Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur
 7, rue René Descartes
 67084 Strasbourg Cédex, France
 e-mail : welsch@math.u-strasbg.fr

1^{er} février 2008

Résumé :

L'objet de cet article est d'obtenir des restrictions sur les orientations complexes des J -courbes réelles séparantes des variétés presque-complexes. Ce problème provient de la géométrie algébrique réelle et le résultat principal est une congruence qui généralise des résultats antérieurs d'Arnol'd, Rokhlin, Mishachev, Zvonilov et Mikhalkin (v. [1], [7], [6], [11], [5]). Cette congruence est obtenue à l'aide d'une application canonique définie sur les groupes d'homologies de dimension moitié de ces variétés à coefficients dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ (v. §1).

Abstract :

The aim of this article is to obtain restrictions on complex orientations of dividing real J -curves of almost-complex manifolds. This problem comes from real algebraic geometry and the main result is a congruence generalising Arnol'd, Rokhlin, Mishachev, Zvonilov and Mikhalkin's previous results (see [1], [7], [6], [11], [5]). This congruence is obtained with a canonical map defined on homology groups of dimension half the dimension of the manifold with coefficients in $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, with values in $\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ (see §1).

Introduction

Soit X une variété de classe C^1 , de dimension $2n$, munie d'une structure presque-complexe J de classe C^1 . Une *structure réelle* c sur X est une involution de classe C^1 dont la différentielle anti-commute avec J . L'ensemble des points fixes de c est alors une sous-variété de dimension n de X notée $X_{\mathbb{R}}$, et appelée *partie réelle* de X (cette terminologie provient de la géométrie algébrique réelle). Des exemples de telles variétés sont donnés par \mathbb{C}^k , $\mathbb{C}P^k$ munis de la conjugaison complexe, $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l$ muni du produit des conjugaisons complexes, ou encore toutes leurs sous-variétés complexes qui sont stables par la conjugaison complexe.

Une *J -courbe réelle* de X est un plongement dans X d'une surface de Riemann S , où la surface S est munie d'une structure réelle c_S , et le plongement commute d'une part avec les involutions c

Mots-clés : courbe algébrique réelle, variété presque-complexe.

Classification AMS : 14P25, 14Q05.

et c_S , et d'autre part sa différentielle commute avec les structures presque-complexes de S et X . Remarquons que la surface S n'est pas forcément connexe et que ce plongement se restreint en un plongement de $S_{\mathbb{R}}$ dans $X_{\mathbb{R}}$. Une première question se pose alors : quels sont, à isotopie de $X_{\mathbb{R}}$ près, les courbes de $X_{\mathbb{R}}$ obtenues comme parties réelles de J -courbes réelles réalisant une classe d'homologie de $H_2(X; \mathbb{Z})$ donnée ?

Cette question a été posée par D. Hilbert pour les courbes algébriques réelles non-singulières de $\mathbb{C}P^2$ dans son 16^{ème} problème (v. [3]), elle est toujours ouverte à ce jour à partir du degré 8 (voir les surveys [10] et [8]). Un premier résultat est que le nombre de composantes connexes de la partie réelle $S_{\mathbb{R}}$ ne dépasse pas $g + \mu$ où g est le genre de la courbe S (c'est-à-dire la somme des genres de ses composantes connexes), et μ est le nombre de composantes connexes de S . Ce genre est bien défini par la classe d'homologie réalisée par la J -courbe, puisqu'une telle courbe vérifie la formule d'adjonction. Les courbes possédant ce nombre maximal de composantes sont appelées *courbes maximales*, ou M -courbes ; celles dont le nombre de composantes diffère du nombre maximal de r sont notées $(M - r)$ -courbes.

Une surface de Riemann réelle S est dite *séparante* s'il existe une partie S^+ de S , bordée par $S_{\mathbb{R}}$, telle que $S^+ \cup c_S(S^+) = S$ et $S^+ \cap c_S(S^+) = S_{\mathbb{R}}$. Une telle partie S^+ (qui est canoniquement orientée, l'orientation provenant de la structure presque-complexe de S) induit une orientation sur $S_{\mathbb{R}}$ appelée *orientation complexe* ; lorsque S est connexe par exemple, sa partie réelle $S_{\mathbb{R}}$ possède exactement deux orientations complexes, qui sont opposées. Une J -courbe réelle est dite *séparante* si c'est un plongement d'une surface de Riemann séparante, et une seconde question apparaît : quels sont, à isotopie de $X_{\mathbb{R}}$ près, les plongements de courbes orientées dans $X_{\mathbb{R}}$ obtenus comme parties réelles de J -courbes réelles séparantes réalisant une classe d'homologie de $H_2(X; \mathbb{Z})$ donnée ?

Les premières restrictions sur ces plongements ont été données par une congruence d'Arnol'd ([1]), et une formule de Rokhlin ([7]). Ces restrictions s'appliquent aux courbes algébriques réelles séparantes non-singulières de degrés pairs de $\mathbb{C}P^2$; toutefois, la formule de Rokhlin a été étendue aux courbes planes projectives non-singulières de degrés impairs par Mishachev ([6]). Plusieurs résultats ont été obtenus pour les courbes sur l'hyperboloïde (v. [2], [4], [5]), en particulier Mikhalkin a obtenu quelques obstructions sous forme de congruences (v. [5] théorèmes 5.5, 5.7, 5.8, 5.9 et 6.1 d). Le cas des surfaces complexes plus générales a été peu étudié, Zvonilov ([11]) a généralisé une partie du résultat de Rokhlin aux surfaces compactes complexes quelconques, mais pour les courbes dont la partie réelle réalise la classe d'homologie nulle dans $H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$.

Dans cet article, tous ces résultats sont unifiés et généralisés en une seule et même congruence (v. corollaire 2.6). Le §1 contient quelques définitions, en particulier celle de l'application \mathcal{P}_c qui est fondamentale dans la suite. Soit l un entier pair, la forme quadratique $x \mapsto x \circ c_*(x)$ de $H_n(X; \mathbb{Z})$ passe au quotient en une application $q_c : H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$. L'application \mathcal{P}_c étend cette forme à $H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, elle est définie géométriquement. Les principaux résultats de cet article, ainsi que les liens avec les résultats précédents sont énoncés et démontrés dans le §2. Le §3 est consacré au cas des surfaces fibrées (sans fibres singulières) dont la base ou les fibres sont simplement connexes, c'est le cas par exemple des surfaces réglées. Enfin dans le §4 sont donnés quelques exemples concrets de classes d'isotopies de courbes orientées de $X_{\mathbb{R}}$ qui ne sont pas réalisés comme parties réelles de J -courbes réelles séparantes d'une classe donnée, ce qui apparaît comme une conséquence des résultats précédents.

Il faut remplacer $dt + rs \equiv 0 \pmod{4}$ par $dt + rs \equiv 2 \pmod{4}$ dans le théorème 5.9.

Pour obtenir une formule d'orientations complexes généralisant celle de Rokhlin, il faut calculer les classes d'homologies des cycles construits par Zvonilov, et leur indice d'intersection. Un tel calcul est effectué dans le §2.2, mais pour des surfaces X plus particulières.

Remerciement :

Ce travail a été effectué sous la direction de V. Kharlamov. Je lui en suis vivement reconnaissant.

Notations :

$T_x M$: espace tangent en x de la variété M de classe C^1 .

$\chi(A)$: caractéristique d'Euler de A .

∂A : bord de la chaîne A .

$[A]$: classe d'homologie du cycle A .

$x \circ y$: forme bilinéaire d'intersection de Poincaré.

$C_k(X; R)$, $Z_k(X; R)$, $B_k(X; R)$, $H_k(X; R)$: espace des chaînes (resp. cycles, bords, classes d'homologies) singulières de dimension k de X à coefficients dans R .

Toutes les chaînes seront entières, les cycles quant à eux seront entiers ou à coefficients dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

1 Application \mathcal{P}_c

Soit X une variété de classe C^1 compacte orientée de dimension $2n$ ($n \in \mathbb{N}$), munie d'une involution c de classe C^1 qui préserve l'orientation et telle que chaque composante connexe de la sous-variété X^c de ses points fixes est de dimension au plus n .

1.1 Chaînes simpliciales

Une k -chaîne singulière A de X ($k \in \{0, \dots, 2n\}$) est dite *simpliciale* s'il existe une triangulation de classe C^1 de X pour laquelle A soit une chaîne simpliciale. Dans ce cas, le *squelette de dimension* q de A associé à cette triangulation est la réunion des faces de A de dimensions inférieures ou égales à q ($q \in \{0, \dots, k\}$).

Deux chaînes simpliciales A et B sont dites *transverses* si en tout point d'intersection x de A et B , les espaces tangents T_A et T_B des faces de A et B (associées à des triangulations de X) contenant x sont en position générale dans $T_x X$. Considérons deux supplémentaires orientés ω_A et ω_B de T_A et T_B : c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels orientés de $T_x X$ tels que $T_A \oplus \omega_A = T_B \oplus \omega_B = T_x X$ en tant qu'espaces orientés. L'intersection $T_A \cap T_B$ est orientée de sorte que $(T_A \cap T_B) \oplus \omega_A \oplus \omega_B = T_x X$ en tant qu'espaces orientés. Si A et B sont deux chaînes simpliciales transverses, il existe une triangulation de classe C^1 de X pour laquelle l'intersection algébrique $A \circ B$ est également une chaîne simpliciale dont les faces sont les intersections orientées des faces de A et B , et les multiplicités de ces faces sont les produits des multiplicités des faces de A et B .

Une chaîne simpliciale A de dimension k d'une variété à bord M est dite *transverse au bord* de M si dans un voisinage du bord de M , identifié à un produit de ∂M par un intervalle, la chaîne A s'identifie elle aussi à un produit de $A \cap \partial M$ par un intervalle.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la suite :

Lemme 1.1 *Soient M une variété orientée à bord de dimension $2n + 1$ et A, B deux chaînes simpliciales de dimension $n + 1$ de $C_k(M; R)$. Supposons que A et B soient transverses au bord et que ∂A et ∂B soient deux chaînes simpliciales transverses de ∂M . Alors en tout point x de $\partial A \cap \partial B$:*

$$\partial(A \circ_M B)(x) = \partial A \circ_{\partial M} \partial B(x). \quad \square$$

Lemme 1.2 *Si A et B sont deux chaînes simpliciales transverses de dimension $n + 1$ d'une variété M orientée de dimension $2n + 1$, alors en tout point x de $A \cap \partial B$,*

$$\partial(A \circ B)(x) = A \circ \partial B(x). \quad \square$$

(Dans le lemme 1.2, la variété M peut éventuellement être à bord. Dans ce cas, la condition de transversalité de A et B implique que le point x est dans l'intérieur de M .)

1.2 Application \mathcal{P}_c

Soient l un entier pair et A une chaîne simpliciale de dimension n de X , dont le bord est nul modulo l . Si la chaîne A est telle que A et $c(A)$ sont transverses, elle est dite *générique*. Pour de telles chaînes, on pose $\mathcal{P}_c(A) = A \circ c(A)$ réduit modulo $2l$ (de sorte que \mathcal{P}_c est à valeur dans $\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$).

Proposition 1.3 *Il existe des cycles génériques dans chaque classe d'homologie de $H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, et \mathcal{P}_c passe au quotient en une application $H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ (toujours notée \mathcal{P}_c) telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} & & \\ \downarrow \text{red}_l & \searrow q_c & \\ H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{P}_c} & \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z} \end{array}$$

soit commutatif.

(Rappelons que la forme quadratique $(x, y) \mapsto x \circ c_*(y)$ réduite modulo $2l$ et définie sur $H_n(X; \mathbb{Z})$ passe au quotient en une application de $H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$; cette application est notée q_c . Par ailleurs, convenons que $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$).

Démonstration :

Dans chaque classe d'homologie de $H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, un cycle simplicial qui est en position générale dans X est générique puisque par hypothèse les composantes connexes de X^c sont de dimension au plus n .

Soient A_0, A_1 deux chaînes génériques de dimension n , de bord nul modulo l et qui sont homologues dans $C_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{P}_c(A_0)$ et $\mathcal{P}_c(A_1)$ sont égaux. Notons $\tilde{X} = X \times [0, 1]$, $\tilde{c} = c \times id$, $\tilde{X}^c = X^c \times [0, 1]$, et plongeons A_i dans $X \times \{i\}$ ($i \in \{0, 1\}$).

Il existe une chaîne simpliciale $H \in C_{n+1}(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ telle que $\partial H = A_1 - A_0 - l\theta$ où $\theta \in C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ (et θ est également simplicial). La chaîne H peut être choisie en position générale dans \tilde{X} de sorte que :

- le squelette de dimension $n - 1$ de H n'intersecte pas $c(H)$.
- H est transverse à \tilde{X}^c et au bord de \tilde{X} .
- si x est un point d'intersection de H et $c(H)$ n'appartenant pas à \tilde{X}^c , alors H et $c(H)$ sont transverses en x .
- si x est un point d'intersection d'un simplexe de dimension $n + 1$ de H et de \tilde{X}^c , alors H et $c(H)$ sont transverses en x ; et si x est un point d'intersection d'un simplexe de dimension n de H et de \tilde{X}^c , l'espace tangent en x de ce simplexe et de son conjugué engendrent un sous-espace E_x de dimension $2n$ de $T_x \tilde{X}$ qui ne contient aucun espace tangent en x de simplexes de dimension $n + 1$ de H contenant x .

L'intersection algébrique $H \circ c(H)$ est une 1-chaîne à coefficients entiers, de sorte que $\partial(H \circ c(H))$ est une 0-chaîne dont la somme des coefficients est nulle. Par ailleurs, si x est un point du bord de cette 1-chaîne, soit x appartient à l'intersection de A_1 ou A_0 avec son conjugué, soit x est un point d'intersection de $\ell\theta$ avec un simplexe de dimension $n+1$ de $c(H)$ (x n'appartient alors pas à \tilde{X}^c), soit x est un point d'intersection de $\ell\theta$ et $c(\ell\theta)$ (x appartient alors à \tilde{X}^c). D'après le lemme 1.1, la contribution au bord de $H \circ c(H)$ des points de la première catégorie est $\mathcal{P}_c(A_1) - \mathcal{P}_c(A_0)$ (l'orientation de $X \times \{0\}$ est opposée à celle de X). D'après le lemme 1.2, la contribution modulo $2l$ des points de la seconde catégorie est nulle (ces points sont couplés par deux par l'involution c). Quant aux points de la troisième catégorie, leur contribution est également nulle modulo $2l$, en effet, soit x un tel point d'intersection et E_x le sous-espace de dimension $2n$ de $T_x\tilde{X}$ engendré par les espaces tangents T_1 et T_2 en x des simplexes de dimension n de H et $c(H)$. Ce sous-espace E_x sépare $T_x\tilde{X}$ en deux demi-espaces \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 et on note $H_1 = T_x H \cap \tilde{X}_1$ et $H_2 = T_x H \cap \tilde{X}_2$. Il existe deux entiers t_1, t_2 tels que $\partial H_1 = t_1 T_1$, $\partial H_2 = t_2 T_2$ et $t_1 + t_2 = 0 \pmod{l}$. En appliquant le lemme 1.1, on s'aperçoit que la contribution au bord de $H \circ c(H)$ de x est $(t_1^2 - t_2^2) T_1 \circ_{\partial\tilde{X}_1} T_2$, cette contribution est donc nulle modulo $2l$. \square

Les propriétés suivantes de l'application \mathcal{P}_c se vérifient facilement :

- Proposition 1.4** 1. $\mathcal{P}_c(a+b) = \mathcal{P}_c(a) + \mathcal{P}_c(b) + i(a \circ c_*(b))$ où i est l'injection $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ et $a, b \in H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.
2. $\mathcal{P}_c(\rho(a)) = a \circ c_*(a)$ où $a \in H_n(X; \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z})$ et $\rho : H_n(X; \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ est la réduction modulo l .
3. Si $a \in H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, alors $\mathcal{P}_c(a) = \mathcal{P}_c(c_*(a))$ et $a \circ c_*(a) = \mathcal{P}_c(a) \pmod{l}$. \square

2 Orientations complexes des J -courbes réelles

2.1 Résultat principal : une congruence

Soit X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 (réelle), munie d'une structure réelle c et de l'orientation induite par la structure presque-complexe.

Soient Λ une J -courbe réelle séparante de X , et Λ^+ une partie de $\Lambda \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}$ bordée par $\Lambda_{\mathbb{R}}$, qui induit une orientation complexe sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$ que nous fixons. Choisissons j courbes lisses orientées $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ de $X_{\mathbb{R}}$, chacune soit disjointe de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, soit confondue avec une composante de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, ainsi que $j+1$ entiers l, s_1, \dots, s_j tels que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = l \sum_{i=1}^j s_i [\lambda_i] \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$. Les courbes λ_i peuvent être choisies de sorte que lorsqu'une telle courbe est confondue avec une composante de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, les orientations de la courbe et de la composante coïncident.

Soit $\{B_k, k \in K\}$ l'ensemble des composantes connexes du complémentaire de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{i=1}^j \lambda_i$ dans $X_{\mathbb{R}}$. Lorsqu'une composante B_k est orientable, elle est munie d'une orientation arbitraire. De la suite exacte longue associée à la paire $(X_{\mathbb{R}}, \Lambda_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{i=1}^j \lambda_i)$ découle le lemme suivant :

Lemme 2.1 Il existe une famille d'entiers $(t_k)_{k \in K}$ telle que $t_k = 0$ si B_k n'est pas orientable, et $\partial(\sum_{k \in K} t_k B_k) = l \sum_{i=1}^j s_i \lambda_i - \Lambda_{\mathbb{R}}$. \square

Soient $(t_k)_{k \in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 2.1, et ind la fonction de $X_{\mathbb{R}}$ définie par $\text{ind}(x) = t_k$ si $x \in B_k$ et $\text{ind}(x) = 0$ si $x \in \Lambda_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{i=1}^j \lambda_i$. La somme $\sum_{k \in K} t_k^2 \chi(B_k)$ est notée $\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi$ (notation introduite par Viro dans [9]).

Théorème 2.2 Soit Λ une J -courbe réelle séparante de X , telle que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = l \sum_{i=1}^j s_i [\lambda_i] \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ où l, s_1, \dots, s_j sont $j+1$ entiers et $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ sont j courbes lisses orientées de $X_{\mathbb{R}}$,

chacune soit disjointe de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, soit incluse dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$ auquel cas l'orientation de la courbe coïncide avec l'orientation de $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Soient $(t_k)_{k \in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 2.1, ind la fonction de $X_{\mathbb{R}}$ associée et \mathcal{A}_l le 2-cycle $\Lambda^+ + \sum_{k \in K} t_k B_k \in Z_2(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Si l est pair, alors :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l) = - \int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi \quad \text{mod } (2l).$$

Si l est impair, $[\mathcal{A}_l] \circ c_*[\mathcal{A}_l] = - \int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi \quad \text{mod } (l)$.

Démonstration :

Choisissons un champ de vecteurs ξ de classe C^1 , tangent à $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \cup_{i=1}^j \lambda_i$, compatible avec l'orientation de cette courbe. On étend ce champ à \mathcal{A}_l tout entier de sorte qu'en décalant ce cycle à l'aide d'un flot associé au champ de vecteurs $J(\xi)$, on obtient un cycle simplicial $\tilde{\mathcal{A}}_l$ générique. Da la même façon que dans [7], on s'aperçoit que $\mathcal{A}_l \circ c(\tilde{\mathcal{A}}_l) = - \int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi$. \square

Théorème 2.3 Soit Λ une J -courbe réelle séparante de X , telle que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Soit B une partie $X_{\mathbb{R}} \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}$ telle que $\partial B = \Lambda_{\mathbb{R}} \quad \text{mod } (2)$ et \mathcal{A}_l le cycle $\Lambda^+ + B \in Z_2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l) = -\chi(B) \quad \text{mod } (4).$$

Démonstration :

Si la partie B est orientable, c'est un corollaire du théorème 2.2 ; sinon, ce théorème se démontre comme le précédent. \square

Remarque : Si $\text{Tor}_1(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$, le cycle \mathcal{A}_l se relève en un cycle entier et définit un élément a de $H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Dans ce cas la proposition 1.3 implique que $\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l) = q_c(a)$.

2.2 Calcul de la classe $[\mathcal{A}_l]$

L'objet de ce paragraphe est de donner une classe de variétés presque-complexes pour lesquelles il est possible de calculer a (et $q_c(a)$) en fonction de $[\Lambda] \in H_2(X; \mathbb{Z})$, des orientations complexes de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et du choix des entiers $(t_k)_{k \in K}$.

2.2.1 L'indice $i(\lambda, \mathcal{A}_l)$

Soient λ une courbe lisse de $X_{\mathbb{R}}$, transverse à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et \mathcal{A}_l le cycle défini dans le théorème 2.2. Soit ξ une section de $(TX_{\mathbb{R}})|_{\lambda}$, de classe C^1 , ne s'annulant pas, et transverse à $T\lambda \subset (TX_{\mathbb{R}})|_{\lambda}$. Supposons de plus que les points en lesquels le champ ξ est tangent à la courbe λ n'appartiennent pas à $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \cup_{i=1}^j \lambda_i$, et notons $\Lambda'_{\mathbb{R}}$ un champ de vecteurs tangents à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ ne s'annulant pas et compatible avec l'orientation de cette courbe.

Dans les sections 2.1 et 2.2, la courbe Λ^+ intervient dans le cycle \mathcal{A}_l avec une multiplicité 1, tandis que dans la section 2.3, cette courbe intervient dans \mathcal{A}_l avec une multiplicité supérieure, notée $q \in \mathbb{N}^*$. Soit x un point d'intersection de λ et $\Lambda_{\mathbb{R}}$, posons :

$$i_{\xi}(\lambda, \mathcal{A}_l)(x) = \begin{cases} +q & \text{si } \xi(x) \text{ et } \Lambda'_{\mathbb{R}}(x) \text{ appartiennent à la même composante de } T_x X_{\mathbb{R}} \setminus T_x \lambda, \\ -q & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit à présent x un point en lequel $\xi(x)$ est tangent à λ , et S une sphère de $X_{\mathbb{R}}$ centrée en x , choisie suffisamment petite de sorte d'une part qu'elle soit incluse dans une partie B_k et qu'elle ne contienne aucun autre point en lequel ξ est tangent à λ , et d'autre part que λ ne l'intersecte qu'en deux points x_1 et x_2 . Choisissons également S de sorte que $\xi(x_1)$ et $\xi(x_2)$ soient tangents à S . Si

B_k n'est pas orientable, on pose $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)(x) = 0$. Sinon, la sphère S est le bord d'un disque orienté de B_k centré en x et hérite d'une orientation provenant de ce disque. Posons :

- $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)(x) = 0$ si $\xi(x_1)$ et $\xi(x_2)$ ne se prolongent pas en un champ de vecteurs tangents de S .
- $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)(x) = 2t_k$ si $\xi(x_1)$ et $\xi(x_2)$ se prolongent en un champ de vecteurs tangents de S compatible avec son orientation, et $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)(x) = -2t_k$ dans le cas contraire.

Finalement, posons $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l) = \sum i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)(x)$ (la somme étant prise sur les points x d'intersection de λ et $\Lambda_\mathbb{R}$ et les points en lesquels ξ est tangent à λ). Cette valeur ne change pas si on modifie ξ en dehors de $\Lambda_\mathbb{R} \cup \bigcup_{i=1}^j \lambda_i$.

Lemme 2.4 *La valeur modulo $2l$ de $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)$ est indépendante du champ ξ . Par ailleurs, si le champ ξ est fixé sur $(\bigcup_{i=1}^j \lambda_i) \cap \lambda$, alors $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)$ est un entier qui ne dépend pas de la façon de prolonger ce champ à λ .*

On note $i(\lambda, \mathcal{A}_l) \in \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ l'élément donné par le lemme 2.4.

Démonstration :

Choisissons une famille de champs de vecteurs de référence de classe C^1 , définis sur λ , tous égaux en dehors d'un voisinage d'un point x_0 fixé (n'appartenant pas à $\Lambda_\mathbb{R} \cup \bigcup_{i=1}^j \lambda_i$), ne s'annulant pas, et qui ne sont tangents à λ qu'au voisinage de ce point x_0 .

Pour vérifier la première partie du lemme, on s'aperçoit que pour tout champ de vecteurs ξ de classe C^1 ne s'annulant pas et transverse à $T\lambda \subset (TX_\mathbb{R})|_\lambda$, il existe un chemin continu $\xi(t)$ de champs de vecteurs de classe C^1 ne s'annulant pas et transverse à $T\lambda \subset (TX_\mathbb{R})|_\lambda$ reliant ξ à l'un des champs de vecteurs de référence, et que la valeur modulo $2l$ de $i_{\xi(t)}(\lambda, \mathcal{A}_l)$ ne dépend pas de t (lorsqu'elle est bien défini). Or la valeur de $i_\xi(\lambda, \mathcal{A}_l)$ pour un champ qui est défini en dehors d'un voisinage de x_0 ne dépend pas du prolongement de ce champ à λ tout entier. La seconde partie du lemme 2.4 se vérifie de façon analogue. \square

2.2.2 Calcul de la classe $[\mathcal{A}_l]$

Soit X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 munie d'une structure réelle c et de l'orientation induite par la structure presque-complexe. Choisissons des J -courbes réelles v^1, \dots, v^n dans X . Supposons que la J -courbe Λ donnée par le théorème 2.2 soit transverse à v^1, \dots, v^n , et notons $i(\mathcal{A}_l)$ l'élément de $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}(i(v_\mathbb{R}^m, \mathcal{A}_l) + v^m \circ \Lambda)$ ($m \in \{1, \dots, n\}$). Notons également Q la matrice de la forme d'intersection de Poincaré de X dans la famille $([v^1], \dots, [v^n])$.

Théorème 2.5 *Supposons que $\text{Tor}_1(H_1(X; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ et que $([v^1], \dots, [v^n])$ forme une base de $H_2(X; \mathbb{Z})/\text{Tors}H_2(X; \mathbb{Z})$. Soit Λ une J -courbe réelle de X satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.2 et transverse aux courbes v^1, \dots, v^n . En utilisant les notations du théorème 2.2, on a :*

$$[\mathcal{A}_l] = [Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))] \in H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$$

(Ici, $[Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))]$ désigne la classe de $H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ dont les coordonnées dans la base $([v^1], \dots, [v^n])$ sont $Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))$.)

Les théorèmes 2.2, 2.3, 2.5 et la proposition 1.3 entraînent les corollaires suivants :

Corollaire 2.6 *Sous les hypothèses et notations du théorème 2.5,*

$$\int_{X_\mathbb{R}} \text{ind}^2 d\chi = -q_c([Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))]) \quad \begin{cases} \text{mod } (2l) \text{ si } l \text{ est pair,} \\ \text{mod } (l) \text{ sinon. } \square \end{cases}$$

Remarque : Si l est impair, pour déterminer l'intégrale $\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi$ modulo $2l$ il suffit de la déterminer modulo l , puisque sa valeur modulo 2 est connue (c'est la caractéristique d'Euler de la réunion des parties B_k pour lesquelles t_k est impair).

Corollaire 2.7 *Supposons que X satisfasse aux hypothèses du théorème 2.5 et soit Λ une J -courbe réelle séparante de X telle que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Soit B une partie de $X_{\mathbb{R}} \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}$ telle que $\partial B = \Lambda_{\mathbb{R}} \pmod{(2)}$, et \mathcal{A}_l le cycle $\Lambda^+ + B \in Z_2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors :*

$$\chi(B) = -q_c([Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))]) \pmod{(4)}. \quad \square$$

Démonstration du théorème 2.5 :

Rappelons que $\partial \mathcal{A}_l = l \sum_{i=1}^j s_i \lambda_i$. Soit ξ un champ de vecteurs de classe C^1 de $X_{\mathbb{R}}$ ne s'annulant pas, défini sur $\cup_{i=1}^j \lambda_i \cup \cup_{m=1}^n v_{\mathbb{R}}^m$, et qui n'est tangent aux courbes v^m qu'en des points n'appartenant pas à $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \cup_{i=1}^j \lambda_i$. Les courbes λ_i peuvent être décalées à l'aide d'un flot associé au champ de vecteurs $-J(\xi)$ de façon à obtenir des courbes $\tilde{\lambda}_i$ disjointes de $X_{\mathbb{R}}$.

La classe d'homologie $\sum_{i=1}^j s_i [\tilde{\lambda}_i] \in H_1(X; \mathbb{Z})$ est d'ordre l , et $\text{Tor}_1(H_1(X; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ par hypothèse. Il existe donc un 2-cycle \tilde{S} de X tel que $\partial \tilde{S} = \sum_{i=1}^j s_i \tilde{\lambda}_i$, et on prolonge ce cycle à l'aide du flot précédent en un cycle S tel que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_l - lS$ soit un 2-cycle entier de X qui relève \mathcal{A}_l .

Considérons à présent une extension du champ ξ (toujours notée ξ) aux courbes v^m ($m \in \{1, \dots, n\}$), et décalons ces courbes à l'aide d'un flot associé au champ de vecteurs $J(\xi)$. On obtient ainsi n courbes \tilde{v}^m ($m \in \{1, \dots, n\}$), homologues aux courbes v^m et dont les intersections avec \mathcal{A} sont transverses. Soit \tilde{x} un point d'intersection de \tilde{v}^m et \mathcal{A} , ce point correspond soit à un point d'intersection x de v^m avec Λ , soit à un point x en lequel ξ est tangent à $v_{\mathbb{R}}^m$, soit à un point d'intersection x de v^m avec S , et :

- si \tilde{x} appartient à Λ et n'est pas voisin de $X_{\mathbb{R}}$, alors $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A}(\tilde{x}) = v^m \circ \Lambda(x) = \frac{1}{2}(v^m \circ \Lambda(x) + v^m \circ \Lambda(c(x)))$.
- si \tilde{x} est voisin de $X_{\mathbb{R}}$ et appartient à Λ , alors $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A}(\tilde{x}) = v^m \circ \Lambda(x) \pmod{(l)} = \frac{1}{2}(v^m \circ \Lambda(x) + i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_l)(x)) \pmod{(l)}$ (ce sont des égalités entre entiers si le point x n'appartient pas en plus à une courbe λ_i).
- si \tilde{x} appartient à S et correspond à un point x n'appartenant pas à Λ , alors $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A}(\tilde{x}) = 0 \pmod{(l)}$.
- si \tilde{x} n'appartient ni à Λ , ni à S , alors $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_l)(x)$.

Il en découle que $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A} = \frac{1}{2}(v^m \circ \Lambda + i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_l)) \pmod{(l)}$ et donc que $[\mathcal{A}_l] = [Q^{-1}(i(\mathcal{A}_l))] \in H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, puisque $([v^1], \dots, [v^n])$ est une base de $H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. \square

2.3 Compléments.

2.3.1 Complément au corollaire 2.6.

Soit X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 (réelle) satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.5, et Λ une J -courbe réelle séparante de X . La courbe $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est munie d'une orientation complexe provenant d'une partie Λ^+ de $\Lambda \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}$ bordée par $\Lambda_{\mathbb{R}}$.

Supposons qu'il existe $j + 2$ entiers q, l, s_1, \dots, s_j , et j courbes lisses orientées $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ de $X_{\mathbb{R}}$, chacune soit disjointe de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, soit confondue avec une composante de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, tels que $q[\Lambda_{\mathbb{R}}] = ql \sum_{i=1}^j s_i [\lambda_i] \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$. Les courbes λ_i peuvent être choisies de sorte que lorsqu'une telle courbe est confondue avec une composante de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, les orientations de la courbe et de la composante coïncident.

Notons $\{B_k, k \in K\}$ l'ensemble des composantes connexes du complémentaire de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \cup_{i=1}^j \lambda_i$ dans $X_{\mathbb{R}}$; il existe une famille $(t_k)_{k \in K}$ d'entiers tels que $\partial(\sum_{k \in K} t_k B_k) = ql \sum_{i=1}^j s_i \lambda_i - q\Lambda_{\mathbb{R}}$ (de la même façon que dans le lemme 2.1). Soient ind la fonction de $X_{\mathbb{R}}$ associée à cette famille (v. §2.1 pour une définition), et $\mathcal{A}_{q,l}$ le cycle $q\Lambda^+ + \sum_{k \in K} t_k B_k \in Z_2(X; \mathbb{Z}/ql\mathbb{Z})$.

Soit ξ une section de $(TX_{\mathbb{R}})|_{\cup_{i=1}^j \lambda_i}$ de classe C^1 , ne s'annulant pas, et transverse à $T(\cup_{i=1}^j \lambda_i) \subset (TX_{\mathbb{R}})|_{\cup_{i=1}^j \lambda_i}$. Soit x un point en lequel ξ est tangent à λ_i ($i \in \{1, \dots, j\}$), et S_x une sphère de $X_{\mathbb{R}}$ centrée en x choisie suffisamment petite de sorte qu'elle soit incluse dans la réunion $B_{k_1} \cup B_{k_2}$ des parties de $X_{\mathbb{R}}$ se situant de part et d'autre de λ_i , qu'elle ne contienne aucun autre point en lequel ξ est tangent à λ_i , et qu'elle ne soit intersectée par λ_i qu'en deux points x_1 et x_2 . Choisissons de plus S_x de sorte que $\xi(x_1)$ et $\xi(x_2)$ soient tangents à cette sphère. Si ces deux vecteurs ne se prolongent pas en un champ sur la sphère, on pose $o_i(\xi)(x) = 0$. Sinon, ces deux vecteurs induisent une orientation sur S_x et par suite une orientation sur le disque centré en x et bordé par S_x . Posons alors $o_i(\xi)(x) = \epsilon_1 t_{k_1} + \epsilon_2 t_{k_2} + q\epsilon_3$ où $\epsilon_p = +1$ (resp. -1) si l'orientation de B_{k_p} coïncide (resp. ne coïncide pas) avec l'orientation de ce disque ($p \in \{1, 2\}$) et $\epsilon_3 = 0$ (resp. 1) si λ_i n'est pas incluse (resp. est incluse) dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Notons $o_i(\xi) = \sum o_i(\xi)(x)$, la somme étant prise sur les points x en lesquels ξ est tangent à λ_i et orienté dans le sens de λ_i ; et enfin $i(\xi) = \sum_{i=1}^j s_i o_i(\xi)$.

Supposons qu'en les points d'intersections de $\cup_{i=1}^j \lambda_i$ et $\cup_{m=1}^n v^m$, le champ ξ n'est pas tangent aux courbes v^m . D'après le lemme 2.4, l'entier $i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_{q,l})$ ne dépend pas du prolongement de ξ à $v_{\mathbb{R}}^m$. Notons $i_{\xi}(\mathcal{A}_{q,l}) \in \mathbb{Z}^n$ le vecteur dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}(i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_{q,l}) + v^m \circ q\Lambda)$.

Remarquons enfin qu'un flot associé au champ de vecteur $-J(\xi)$ permet de décaler les courbes λ_i en des courbes $\tilde{\lambda}_i$ incluses dans $X \setminus (X_{\mathbb{R}} \cup \cup_{m=1}^n v^m)$.

Théorème 2.8 *Supposons que X satisfasse aux hypothèses du théorème 2.5 et soit Λ une J -courbe réelle séparante de X telle que $q[\Lambda_{\mathbb{R}}] = ql \sum_{i=1}^j s_i [\lambda_i] \in H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs ξ défini sur $\cup_{i=1}^j \lambda_i$ comme ci-dessus, tel que les courbes $\tilde{\lambda}_i$ associées satisfassent $\sum_{i=1}^j s_i [\tilde{\lambda}_i] = 0 \in H_1(X \setminus (X_{\mathbb{R}} \cup \cup_{m=1}^n v^m); \mathbb{Z})$, alors :*

$$\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi + qli(\xi) = -q_c([Q^{-1}(i_{\xi}(\mathcal{A}_{q,l}))]) \mod (2q^2l)$$

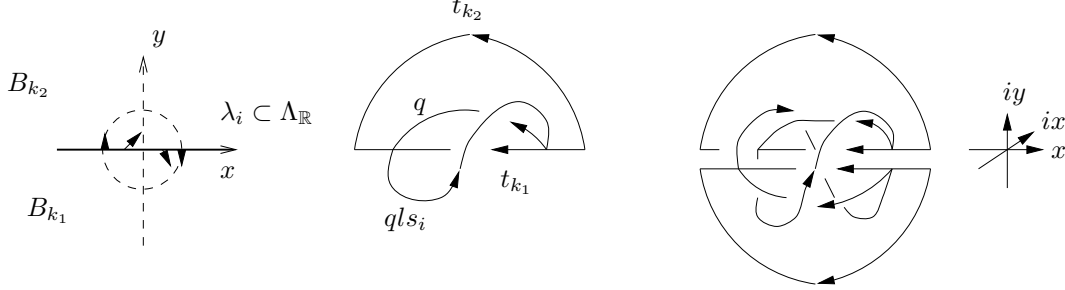
Démonstration :

Considérons une extension du champ ξ (toujours notée ξ) au cycle $\mathcal{A}_{q,l}$ tout entier, et décalons ce cycle à l'aide d'un flot associé au champ $-J(\xi)$ de façon à obtenir un cycle simplicial $\tilde{\mathcal{A}}_{q,l}$ générique. Le bord de ce cycle $\tilde{\mathcal{A}}_{q,l}$ est $ql \sum_{i=1}^j s_i \tilde{\lambda}_i$, et par hypothèse il existe une 2-chaîne \tilde{S} de $X \setminus (X_{\mathbb{R}} \cup \cup_{m=1}^n v^m)$ telle que $\partial \tilde{S} = \sum_{i=1}^j s_i \tilde{\lambda}_i$. A l'aide du flot précédent, on peut prolonger cette chaîne \tilde{S} en une 2-chaîne S bordée par $\sum_{i=1}^j s_i \lambda_i$. Le cycle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{q,l} - qlS$ est alors un 2-cycle entier de X qui relève $\mathcal{A}_{q,l}$.

La classe d'homologie de \mathcal{A} se calcule en prolongeant le champ ξ en un champ sur $\cup_{m=1}^n v^m$ et en décalant ces courbes à l'aide d'un flot associé au champ de vecteurs $J(\xi)$ de façon à obtenir des courbes \tilde{v}^m transverses à \mathcal{A} . Ces courbes \tilde{v}^m n'intersectent pas S par construction, et l'indice d'intersection $\tilde{v}^m \circ \mathcal{A}$ se calcule comme dans la démonstration du théorème 2.5 et vaut $\frac{1}{2}(v^m \circ q\Lambda + i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}_{q,l}))$. Il en découle que $[\mathcal{A}] = ([Q^{-1}(i_{\xi}(\mathcal{A}_{q,l}))]) \in H_2(X; \mathbb{Z})$.

Considérons à présent un champ continu ζ de vecteurs tangents à $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup \cup_{i=1}^j \lambda_i$, compatible avec l'orientation de cette courbe, et prolongeons ce champ à \mathcal{A} tout entier. Décalons alors le cycle \mathcal{A} à l'aide d'un flot associé au champ $J(\zeta)$ de façon à obtenir un cycle $\tilde{\mathcal{A}}$ immergé et générique. L'intersection $\tilde{\mathcal{A}} \circ c(\tilde{\mathcal{A}})$ se calcule géométriquement et vaut $-\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi - qli(\xi) \mod (2q^2l)$. En effet le premier terme provient des zéros du champ de vecteurs ζ , le second des points de $\cup_{i=1}^j \lambda_i$

en lesquels ξ et ζ sont positivement colinéaires. Les intersections entre qlS et $q\Lambda \cup qlc(S)$ qui sont éloignées de $X_{\mathbb{R}}$ n'interviennent pas puisqu'elles sont couplées par c , donc nulles modulo $2q^2l$. Le second terme peut s'obtenir en calculant le nombre d'entrelacement de l'intersection des cycles $\tilde{\mathcal{A}}$ et $c(\tilde{\mathcal{A}})$ avec une petite sphère centrée en un tel point. Cet entrelac est représenté par la figure suivante :



(La sphère S^3 privée de son point d'ordonnée y maximale a été projetée sur \mathbb{R}^3). \square

2.3.2 Cas de deux courbes séparantes disjointes.

Soit X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 (réelle) munie d'une structure réelle c et de l'orientation induite par la structure presque-complexe. Choisissons des J -courbes réelles v^1, \dots, v^n dans X .

Soient Λ et e deux J -courbes réelles séparantes de X , transverses aux courbes v^1, \dots, v^n , et Λ^+ (resp. e^+) une partie de $\Lambda \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}$ (resp. $e \setminus e_{\mathbb{R}}$) bordée par $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (resp. $e_{\mathbb{R}}$), qui induit une orientation complexe sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (resp. $e_{\mathbb{R}}$) que nous fixons. Supposons que $e \circ \Lambda = 0$ et qu'il existe deux entiers q, l tels que $q[\Lambda_{\mathbb{R}}] = l[e_{\mathbb{R}}] \in H_1(X; \mathbb{Z})$. Notons (B_k) les parties du complémentaire de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup e_{\mathbb{R}}$ dans $X_{\mathbb{R}}$, que l'on oriente lorsqu'elles sont orientables, et choisissons une famille d'entiers (t_k) tels que $t_k = 0$ si B_k n'est pas orientable, et $\partial \sum_k t_k B_k = -q\Lambda_{\mathbb{R}} - le_{\mathbb{R}}$. De la même façon que dans la section 2.1, notons ind la fonction associée à cette famille d'entiers, et \mathcal{A} le 2-cycle entier $q\Lambda^+ + le^+ + \sum_k t_k B_k$.

Notons enfin $i(\mathcal{A})$ l'élément de \mathbb{Z}^n dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}(qv^m \circ \Lambda + lv^m \circ e + i(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}))$ ($m \in \{1, \dots, n\}$), et Q la matrice de la forme d'intersection de Poincaré dans la famille $([v^1], \dots, [v^n])$. (L'indice $i(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A})$ a été défini dans la section 2.2.1. Ici, la partie J -holomorphe de \mathcal{A} est $q\Lambda^+ + le^+$, et $i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A})(x)$ vaut $\pm q$ ou $\pm l$ selon que x appartient à $v_{\mathbb{R}}^m \cap \Lambda_{\mathbb{R}}$ ou $v_{\mathbb{R}}^m \cap e_{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, $\cup_{i=1}^j \lambda_i$ est vide, donc d'après le lemme 2.4, l'entier $i_{\xi}(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A})$ est indépendant du champ ξ .)

Théorème 2.9 *Supposons que $([v^1], \dots, [v^n])$ forme une base de l'espace $H_2(X; \mathbb{Z})$, que $e \circ \Lambda = 0$ et qu'il existe deux entiers q, l tels que $q[\Lambda_{\mathbb{R}}] = l[e_{\mathbb{R}}] \in H_1(X; \mathbb{Z})$. En choisissant une fonction ind comme ci-dessus et en notant \mathcal{A} le 2-cycle associé, on a :*

$$\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi = -q_c([Q^{-1}(i(\mathcal{A}))]).$$

Démonstration :

Considérons un champ de vecteurs ξ tangents à $\Lambda_{\mathbb{R}} \cup e_{\mathbb{R}}$, compatible avec l'orientation de cette courbe, qu'on étend au cycle \mathcal{A} tout entier. Décalons le cycle \mathcal{A} à l'aide d'un flot associé au champ $J(\xi)$ de façon à obtenir un cycle simplicial $\tilde{\mathcal{A}}$ homologue à \mathcal{A} et générique (v. §1.2 pour une définition). De la même façon que dans [7], on s'aperçoit que $\mathcal{A} \circ c(\mathcal{A}) = -\int_{X_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi$.

Prolongeons à présent le champ ξ en un champ sur les courbes v^m , et décalons ces courbes à l'aide d'un flot associé au champ $J(\xi)$ de façon à obtenir des courbes \tilde{v}^m homologues aux courbes v^m et transverses à \mathcal{A} . On s'aperçoit que $v^m \circ \mathcal{A} = \frac{1}{2}(qv^m \circ \Lambda + lv^m \circ e + i(v_{\mathbb{R}}^m, \mathcal{A}))$ et il en découle que $[\mathcal{A}] = [Q^{-1}(i(\mathcal{A}))] \in H_2(X; \mathbb{Z})$. \square

2.4 Quelques conséquences.

2.4.1 Formule de Rokhlin.

Dans le cas où l'entier l est nul, les congruences données par les théorèmes 2.2, 2.5, 2.8 et le corollaire 2.6 sont en fait des égalités entre entiers. La formule donnée par le théorème 2.2 est alors la formule de Zvonilov (v. [11]). Si $X = \mathbb{C}P^2$, la formule donnée par le corollaire 2.6 est la formule des orientations complexes de Rokhlin (v. [7]), et celle donnée par le théorème 2.8 est la formule de Mishachev (v. [6]). Remarquons également que lorsque X est la surface réglée Σ_1 à base $\mathbb{C}P^1$ (c'est le plan projectif éclaté en un point), la formule donnée par le théorème 2.9 est la formule de Rokhlin.

2.4.2 Congruences d'Arnol'd et de Mikhalkin.

Si $X = \mathbb{C}P^2$, le corollaire 2.7 est la congruence d'Arnol'd (v. [1]), et dans le cas où $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ muni du produit des conjugaisons complexes, ce corollaire ainsi que le corollaire 2.6 étendent des congruences obtenues par Mikhalkin (v. [5] théorème 5.5, 5.7, 5.8 et 5.9 et 6.1d).

3 Cas de surfaces fibrées.

Soient Σ une variété presque-complexe de dimension 4 réelle et Δ une surface de Riemann réelle séparante. Supposons qu'il existe une submersion J -holomorphe $\pi : \Sigma \rightarrow \Delta$, ainsi qu'une structure réelle c_Σ sur Σ telle que $\pi \circ c_\Sigma = c_\Delta \circ \pi$. La variété Σ est alors dite *fibrée* de base Δ , et chaque fibre est une J -courbe de Σ . Supposons que soit la base Δ , soit les fibres de π sont simplement connexes, que ce fibré possède une J -section e stable par c_Σ , et fixons $([v], [e])$ comme base de l'espace $H_2(\Sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, où $[v]$ est la classe d'homologie d'une fibre v . Remarquons que les composantes connexes de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ sont des tores ou des bouteilles de Klein et qu'au-dessus de chaque composante de $\Delta_{\mathbb{R}}$, il y a au moins une composante de $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

Soit Λ une J -courbe réelle séparante (pas nécessairement connexe) de Σ , et a, b deux entiers tels que $[\Lambda] = (a, b) \in H_2(\Sigma; \mathbb{Z})$. Munissons $\Lambda_{\mathbb{R}}$ d'une orientation complexe, et supposons que dans chaque composante $\Sigma_{\mathbb{R}}^\alpha$ de $\Sigma_{\mathbb{R}}$, il existe une courbe connexe orientée λ_α soit disjointe de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, soit incluse dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (auquel cas l'orientation de λ_α et de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ coïncident), et un entier l_α tel que $[\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}^\alpha] = l_\alpha [\lambda_\alpha] \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}^\alpha; \mathbb{Z})$. Sous cette hypothèse, la courbe Λ est dite *admissible*.

Si C est une courbe orientée de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ au-dessus d'une composante connexe (orientée) D de $\Delta_{\mathbb{R}}$, la classe d'homologie réalisée par le projeté de C dans $H_1(D; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est appelée *nombre d'enroulement* de C et notée $n(C)$.

Lemme 3.1 *Une courbe orientée lisse d'une bouteille de Klein contient au plus deux composantes de nombre d'enroulement ± 1 et ne contient pas de composantes de nombre d'enroulement de module strictement plus grand que 2.*

Démonstration :

Le revêtement double d'orientation de la bouteille de Klein est un tore, et la courbe se relève en une courbe lisse dans ce tore, orientée et invariante par l'involution du revêtement. Chaque composante non contractile de cette courbe est une courbe connexe simple orientée qui est soit disjointe, soit confondue avec son image par l'involution du revêtement ; elle est donc nécessairement homologue -au signe près- au relevé d'une section de la bouteille de Klein, ou bien à une fibre du tore. Les composantes qui sont couplées par deux avec l'involution du revêtement se quotientent en

les composantes de nombre d'enroulement ± 2 ou nul, et celles qui sont stables par l'involution se quotientent en les composantes de nombre d'enroulement ± 1 . Il ne peut pas y avoir plus que deux telles composantes, puisque les voisinages tubulaires de ces composantes dans la bouteille de Klein sont des rubans de Möbius. \square

La condition d'existence de courbes λ_α équivaut à imposer que dans chacune des composantes $\Sigma_\mathbb{R}^\alpha$ qui est une bouteille de Klein, la courbe $\Lambda_\mathbb{R}$ a au plus une composante de nombre d'enroulement ± 1 .

Notons $l = \text{pgcd}(l_\alpha)$, choisissons une famille (t_k) d'entiers telle que si une courbe λ_α est bilatère dans $\Sigma_\mathbb{R}^\alpha$, alors t_k est nul d'un côté de λ_α , et notons ind la fonction associée à ce choix d'entiers (v. §2.1 pour une définition).

Notons s_α l'entier tel que $[\Lambda_\mathbb{R} \cap \Sigma_\mathbb{R}^\alpha] = l s_\alpha [\lambda_\alpha] \in H_1(\Sigma_\mathbb{R}^\alpha; \mathbb{Z})$ et $s = e_\mathbb{R} \circ \sum s_\alpha [\lambda_\alpha] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (la somme étant prise sur tous les indices α , ou de façon équivalente sur les indices α tels que $e_\mathbb{R}$ rencontre $\Sigma_\mathbb{R}^\alpha$). De même, notons $lt \in \mathbb{Z}$ la somme des nombres d'enroulements des courbes $\Lambda_\mathbb{R} \cap \Sigma_\mathbb{R}^\alpha$, où $\Sigma_\mathbb{R}^\alpha$ est une composante rencontrée par $v_\mathbb{R}$ (ce nombre d'enroulement est bien divisible par l , ce qui justifie la notation).

Théorème 3.2 *Soit Σ une variété fibrée de dimension 4 réelle qui admette une J -section e réelle. Supposons que soit la base Δ , soit les fibres de Σ sont simplement connexes. Soit Λ une J -courbe réelle séparante admissible de Σ , de classe $a[v] + b[e]$ dans $H_2(\Sigma; \mathbb{Z})$ où v est la classe d'homologie d'une fibre. Choisissons une fonction ind (associée à un choix d'entiers (t_k)), des entiers l, t et un élément $s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme ci-dessus, et notons $\nu = e \circ e$. On a :*

$$\int_{\Sigma_\mathbb{R}} \text{ind}^2 d\chi = \frac{1}{2}(b + lt)(a + ls + \frac{\nu}{2}(b - lt)) \quad \begin{cases} \text{mod } (2l) \text{ si } l \text{ est pair,} \\ \text{mod } (l) \text{ sinon.} \end{cases}$$

En particulier, si l est pair et B est la réunion des parties B_k pour lesquelles t_k est impair,

$$\chi(B) = \frac{1}{2}(b + lt)(a + ls + \frac{\nu}{2}(b - lt)) \quad \text{mod}(4)$$

Démonstration :

Le corollaire 2.6 s'applique, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}$ et $i(\mathcal{A}_l) = \frac{1}{2}(b + lt, a + \nu b + ls) \text{ mod}(l)$. En effet, $i(\mathcal{A}_l)$ ne dépend que de $\mathcal{A}_l \cap \Sigma_\mathbb{R}$ et est invariant par isotopie de $\Sigma_\mathbb{R}$ (ce qui découle du lemme 2.4). En choisissant une isotopie de façon à rendre $\mathcal{A}_l \cap \Sigma_\mathbb{R}$ voisin de $\cup \lambda_\alpha$, on obtient le résultat. \square

Théorème 3.3 *Soit Σ une surface réglée, de base séparante, telle que $\Sigma_\mathbb{R}$ est une bouteille de Klein (en particulier, $\Sigma_\mathbb{R}$ est connexe) et admettant une J -section e réelle. Soit Λ une J -courbe réelle séparante de Σ telle que $\Lambda_\mathbb{R}$ contienne deux composantes de nombre d'enroulement ± 1 . Notons λ une de ces deux composantes et $l = n(\Lambda_\mathbb{R})n(\lambda)$. Soient a, b deux entiers et s un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tels que $[\Lambda] = (a, b) \in H_2(\Sigma; \mathbb{Z})$ et $[\lambda] = (1 + s)[v_\mathbb{R}] + n(\lambda)[e_\mathbb{R}] \in H_1(\Sigma_\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ où v est une fibre réelle. Soit $(t_k)_{k \in K}$ une famille d'entiers telle que $\partial(\sum_{k \in K} t_k B_k) = 2l\lambda - 2\Lambda_\mathbb{R}$, en notant ind la fonction de $\Sigma_\mathbb{R}$ associée à cette famille (v. §2.1 pour une définition) et $\nu = e \circ e$, on a :*

$$\int_{\Sigma_\mathbb{R}} \text{ind}^2 d\chi + 4l \max(0, n(\lambda)) = 2(b + l)(a + ls + \frac{\nu}{2}(b - l)) \quad \text{mod } (8l)$$

Démonstration :

Il existe un champ ξ de vecteurs tangents de $\Sigma_\mathbb{R}$ de classe C^1 , défini sur λ , transverse aux fibres, tel que projeté sur la base $\Delta_\mathbb{R}$ du fibré il induise un champ compatible avec l'orientation de $\Delta_\mathbb{R}$.

Soit $\tilde{\lambda}$ une courbe obtenue en décalant λ à l'aide d'un flot associé au champ $-J\xi$. Cette courbe est plongée dans la restriction du fibré au dessus d'une partie Δ^- de $\Delta \setminus \Delta_{\mathbb{R}}$ et n'intersecte pas e . Par suite, $[\tilde{\lambda}] = 0 \in H_1(\Sigma \setminus (\Sigma_{\mathbb{R}} \cup (e \cup v)); \mathbb{Z})$, et le théorème 2.8 s'applique avec $q = 2$.

Or $i(\xi) = 2 \max(0, n(\lambda)) \pmod{4}$, $i_{\xi}(\mathcal{A}_{2,l}) = (b+l, a+\nu b+ls) \pmod{4l}$, et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}$. \square

Théorème 3.4 *Soit Σ_{ν} , $\nu > 0$, une surface réglée de base $\mathbb{C}P^1$, et e son diviseur exceptionnel ($e \circ e = -\nu$). Soit Λ une J -courbe réelle séparante de classe $a[v] + b[e]$ dans $H_2(\Sigma_{\nu}; \mathbb{Z})$ ($[v]$ est la classe d'homologie d'une fibre), qui n'intersecte pas le diviseur exceptionnel e de Σ_{ν} , et telle que a et b sont pairs. Il existe un entier l tel que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = l[e_{\mathbb{R}}] \in H_1((\Sigma_{\nu})_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ ($\Lambda_{\mathbb{R}}$ et $e_{\mathbb{R}}$ sont munies d'orientations complexes) et en choisissant une fonction ind comme dans le §2.3.2, on a :*

$$\int_{(\Sigma_{\nu})_{\mathbb{R}}} \text{ind}^2 d\chi = \frac{\nu}{4}(b^2 - l^2)$$

Démonstration :

Le théorème 2.9 s'applique avec $a = \nu b$ et $q = 1$. Choisissons à présent $([v], [\tilde{e}])$ comme base de l'espace $H_2(\Sigma_{\nu}; \mathbb{Z})$, où v est une fibre au-dessus d'un point réel, et \tilde{e} une section holomorphe invariante par la conjugaison complexe et de carré d'intersection ν . Dans cette base $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}$, et $i(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}(b+l, a)$. \square

4 Exemples.

Dans cette section sont donnés quelques exemples d'application des résultats précédents dans le cas de surfaces fibrées de partie réelle connexe.

4.1 Lorsque $\Sigma_{\mathbb{R}}$ est orientable.

Proposition 4.1 *Soit Σ une variété satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2, telle que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ est un tore. Soit Λ une $(M-2r)$ J -courbe réelle de classe $(a, 4)$ dans Σ , telle que $\Lambda_{\mathbb{R}}$ contienne deux composantes de classe $\pm(s, 1)$. Soient p, q les nombres d'ovales se situant dans les deux composantes de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ privé de ces composantes de classe $\pm(s, 1)$ et $\nu = e \circ e$.*

1. Si $2s = a - \nu \pmod{4}$, et p, q sont de parité opposée à $\frac{a}{2} + r$, la courbe n'est pas séparante.
2. Si la courbe est séparante et $2s = a - \nu + 2 \pmod{4}$, alors $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ si p, q sont de même parité que $\frac{a}{2} + r$, et $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = \pm 2(s, 1) \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ sinon.

Démonstration :

Si Λ est séparante, le théorème 3.2 s'applique, $b = 4$, $t = 1$, et $\chi(B)$ vaut le nombre d'ovales plus $2q$ modulo 4. Comme Λ est une $(M-2r)$ -courbe dont la partie réelle possède deux composantes non contractiles, le nombre d'ovales vaut $g(\Lambda) + 1 - 2r - 2 = g(\Lambda) - 1 - 2r$. Le genre de Λ se calcule à l'aide de la formule d'adjonction et vaut $(a-1)(b-1) + \frac{1}{2}\nu b(b-1) + g(\Delta)b$ avec $b = 4$ (Δ est la base du fibré). En appliquant le théorème 3.2, on en déduit que $3(a-1) + 6\nu - 1 - 2r + 2q = \frac{1}{2}(al + l^2(s - \frac{\nu}{2})) \pmod{4}$ (en remarquant que ν est pair). Il en découle que $q = \frac{a}{2} + r \pmod{2}$ si $l = 0$, et $q = s + r + \frac{\nu}{2} \pmod{2}$ si $l = \pm 2$. \square

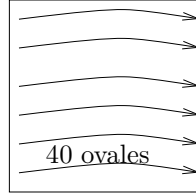
Proposition 4.2 *Soit Σ une variété satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2, telle que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ est un tore. Soit Λ une $(M-2r)$ J -courbe réelle séparante de classe $(a, 6)$ dans Σ , telle que $\Lambda_{\mathbb{R}}$ contienne deux composantes de classe $\pm(s, 2)$. Soient p, q les nombres d'ovales se situant dans les*

deux composantes de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ privé de ces composantes de classe $\pm(s, 2)$ et $\nu = e \circ e$. Alors, avec les notations du théorème 3.2, $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ si p, q sont de même parité que $r + \frac{1}{2}\chi(\Delta)$, et $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = \pm 2(s, 2) \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ sinon.

Démonstration :

Le théorème 3.2 s'applique, $b = 6$, $t = 2$, et $\chi(B)$ vaut le nombre d'ovales plus $2q$ modulo 4. Comme Λ est une $(M - 2r)$ -courbe dont la partie réelle possède deux composantes non contractiles, le nombre d'ovales vaut $g(\Lambda) + 1 - 2r - 2 = g(\Lambda) - 1 - 2r$. Le genre de Λ se calcule à l'aide de la formule d'adjonction et vaut $(a - 1)(b - 1) + \frac{1}{2}\nu b(b - 1) + g(\Delta)b$ avec $b = 6$ (Δ est la base du fibré). En appliquant le théorème 3.2, on en déduit que $5(a - 1) + 15\nu + 2g(\Delta) - 1 - 2r + 2q = 3a + 3ls + 9\nu \pmod{4}$ (en remarquant que ν est pair), ou encore $q = 1 - g(\Delta) + r - \frac{1}{2}ls \pmod{2}$. \square

Proposition 4.3 *Il n'existe pas de $(M - 4)$ -courbe algébrique réelle séparante de bidegré $(8, 8)$ sur l'hyperboloïde dont la partie réelle contient 6 composantes de classe $(0, 1)$ et qui réalise la classe d'isotopie de courbes suivante :*



Démonstration :

Le théorème 3.2 s'applique, $a = b = 8$, $t = 1$, $s = 0$, $l = 6$ et $\nu = 0$. Or dans la congruence modulo 12 donnée par le théorème 3.2, le membre de gauche vaut 4, et le membre de droite vaut 8. \square

Remarques : Dans la proposition 4.1, si Σ est un hyperboloïde, la partie 1 se déduit des résultats antérieurs de Mikhalkin (v. [5]). De même dans la partie 2, le fait que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ implique que p, q sont de même parité que $\frac{a}{2} - r$ peut se déduire de la formule de Zvonilov (v. [11]).

Remarquons qu'il est facile d'énoncer une proposition analogue pour les courbes de classe (a, b) avec a, b pairs, dont la partie réelle contient $(b - 2)$ composantes de classe $\pm(s, 1)$.

Dans la proposition 4.2, le fait que $[\Lambda_{\mathbb{R}}] = 0 \in H_1(\Sigma_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$ implique que p, q sont de parité opposée à $r + \frac{1}{2}\chi(\Delta)$ peut se déduire de la formule de Zvonilov (v. [11]).

4.2 Lorsque $\Sigma_{\mathbb{R}}$ n'est pas orientable.

Proposition 4.4 *Soit Σ une variété satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2, telle que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ est une bouteille de Klein. Soit Λ une $(M - 2r)$ J -courbe réelle de classe $(a, 4)$ dans Σ , telle que $\Lambda_{\mathbb{R}}$ contienne une composante de nombre d'enroulement ± 2 . La composante de nombre d'enroulement ± 2 sépare $\Sigma_{\mathbb{R}}$ en deux rubans de Möbius, et l'âme de l'un d'entre eux a un nombre de points d'intersections impair avec $e_{\mathbb{R}}$. Notons q le nombre d'ovale se situant dans ce ruban et $\nu = e \circ e$. Si $q = \frac{1}{2}(\nu - 1) + r \pmod{2}$, alors la courbe n'est pas séparante.*

Démonstration :

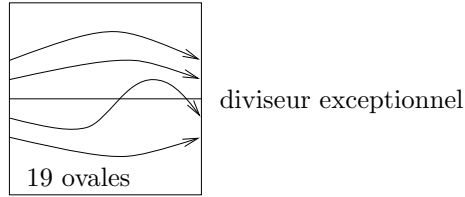
Si Λ est séparante, le théorème 3.2 s'applique, $b = 4$, $l = \pm 2$, choisissons λ de sorte que $s = 1$ et $\chi(B)$ vaut le nombre d'ovales plus $2q$ modulo 4. Comme Λ est une $(M - 2r)$ -courbe dont la partie réelle possède une composante non contractile, le nombre d'ovales vaut $g(\Lambda) + 1 - 2r - 1 = g(\Lambda) - 2r$. Le genre de Λ se calcule à l'aide de la formule d'adjonction et vaut $(a - 1)(b - 1) + \frac{1}{2}\nu b(b - 1) + g(\Delta)b$ avec $b = 4$ (Δ est la base du fibré). En appliquant le théorème 3.2, on en déduit que $3(a - 1) + 6\nu - 2r + 2q = -a + 2 - \nu \pmod{4}$. Il en découle que $2q = 1 + \nu + 2r \pmod{4}$. \square

Proposition 4.5 Soit Σ une variété satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2, telle que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ est une bouteille de Klein. Soit Λ une $(M - 2r)$ J -courbe réelle de classe $(a, 6)$ dans Σ , telle que $\Lambda_{\mathbb{R}}$ contienne deux composantes de nombre d'enroulement ± 2 . Ces composantes séparent $\Sigma_{\mathbb{R}}$ en deux rubans de Möbius et un cylindre, notons q le nombre d'ovales se situant dans les rubans de Möbius. Si $q = r - g(\Delta) \pmod{2}$, la courbe n'est pas séparante.

Démonstration :

Le théorème 3.2 s'applique, $b = 6$, $l = 0$ ou ± 4 , choisissons λ de sorte que $s = 1$ et $\chi(B)$ vaut le nombre d'ovales plus $2p$ modulo 4 (où p est le nombre d'ovales se situant dans le cylindre de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ privé des composantes non contractiles de $\Lambda_{\mathbb{R}}$). Comme Λ est une $(M - 2r)$ -courbe dont la partie réelle possède deux composantes non contractiles, le nombre d'ovales vaut $g(\Lambda) + 1 - 2r - 2 = g(\Lambda) - 1 - 2r$. Le genre de Λ se calcule à l'aide de la formule d'adjonction et vaut $(a - 1)(b - 1) + \frac{1}{2}\nu b(b - 1) + g(\Delta)b$ avec $b = 6$ (Δ est la base du fibré). En appliquant le théorème 3.2, on en déduit que $5(a - 1) + 15\nu + 2g(\Delta) - 1 - 2r + 2p = -a + \nu \pmod{4}$, ou encore $p = 1 + \nu - g(\Delta) + r = r - g(\Delta) \pmod{2}$. \square

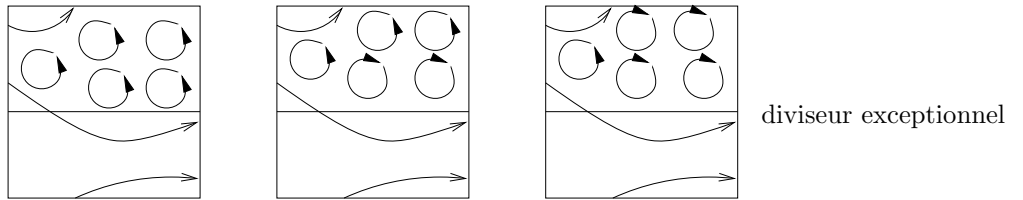
Proposition 4.6 Il n'existe pas de courbe algébrique réelle maximale de classe $(8, 6)$ sur la surface Σ_1 dont la partie réelle contient deux composantes de nombre d'enroulement 2 et qui réalise la classe d'isotopie de courbes suivante :



Démonstration :

Le théorème 3.2 s'applique, $a = 8$, $b = 6$, $l = 4$, choisissons λ de sorte que $s = 1$ et $\nu = -1$. Or dans la congruence modulo 8 donnée par le théorème 3.2, le membre de gauche vaut 3, et le membre de droite vaut -1 . \square

Proposition 4.7 Les schémas complexes suivants ne sont pas réalisés sur la surface Σ_1 comme parties réelles de courbes algébrique réelles maximales de classe $(5, 4)$ contenant deux composantes de nombre d'enroulement 1 :



Démonstration :

Le théorème 3.3 s'applique, $a = 5$, $b = 4$, $l = 2$, choisissons λ de sorte que $s = 1$ et $\nu = -1$. Or dans la congruence modulo 8 donnée par le théorème 3.3, pour ces courbes, le membre de gauche vaut 8, et le membre de droite vaut 0. \square

Références

- [1] V.I. Arnol'd, *Distribution of ovals of the real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifold, and the arithmetic of integral quadratic forms*, Funct. anal. appl. **5** (1971) 169-176.

- [2] D.A. Gudkov, *On the topology of algebraic curves on a hyperboloid*, Russian Math. Surveys **34** :6 (1979), 27-35.
- [3] D. Hilbert, *Mathematische probleme*, Arch. Math. Phys. (3) **1** (1901), 213-237.
- [4] S. Matsuoka *Congruences for M and $(M - 1)$ -curves with odd branches on a hyperboloid*, Bull. London Math. Soc. **24** (1992) no 1, 61-67.
- [5] G. Mikhalkin, *The complex separation of real surfaces and extensions of Rokhlin congruence*, Invent. math. **118** (1994) 197-222.
- [6] N. M. Mishachev, *Complex orientations of plane M -curves of odd degree*, Funct. anal. appl. **9** (1975) 342-343.
- [7] V. A. Rokhlin, *Complex orientations of real algebraic curves*, Funct. anal. appl. **8** (1974) 331-334.
- [8] O. Ya. Viro, *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years*, Russian Math Surveys, **41** :3 (1986) 55-82.
- [9] O. Ya. Viro, *Some integral calculus based on euler characteristic*, Lecture Notes in Math **1346** Springer, Berlin-New-York, (1988) 127-138.
- [10] G. Wilson, *Hilbert's sixteen problem*, Topology **17** (1978) 53-74.
- [11] V. I. Zvonilov, *Complex topological characteristics of real algebraic curves on surfaces*, Funct. anal. appl. **16** (1982) 202-204.